CIV Concours d'entrée 2018
Mathematiques

Durée: 3 heures

Centre d'Examen: ____________________

Numéro d'inscription du candidat : ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Consignes pour les candidats

- Inscrivez ci-dessus votre numéro d'inscription et le nom de la ville où vous passez cette épreuve (Astana, Almaty ou Chymkent).
- N'ouvrez pas ce sujet jusqu'à ce que l'on vous en donne l'autorisation.
- Les calculatrices ou formulaires ne sont pas autorisés.
- Vos réponses doivent être écrites en **Français ou en Anglais** dans les espaces prévus à cet effet.
- Une réponse partielle est toujours intéressante. N'hésitez pas à écrire un raisonnement, même incomplet.
- Une suggestion de barème est indiquée en début de chaque exercice. Nous vous suggérons d'en tenir compte dans le temps que vous consacrerez à chaque exercice.
- Pour information, le barème suggéré maximum total est de 125 points.

Les notations utilisées dans ce document sont classiques : par exemple $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$ et $\frac{df}{dx}$ ou $f'(x)$ est la dérivée d'une fonction f relativement à la variable x.

BONNE CHANCE / GOOD LUCK !

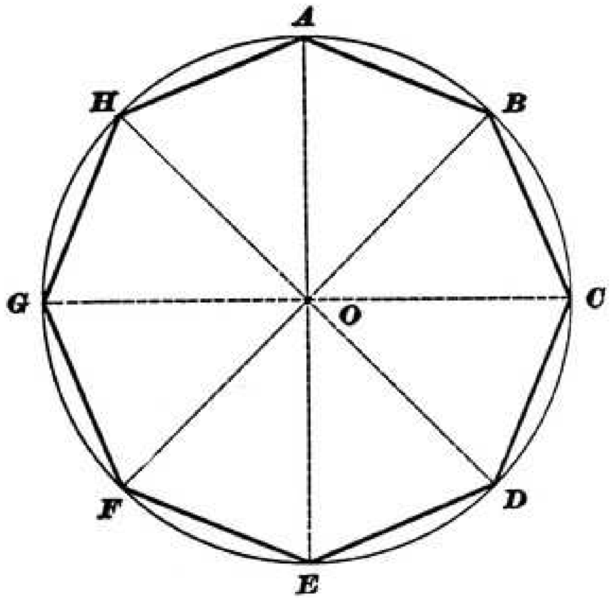
1. [5 points maximum]

Résoudre $\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$ avec x réel appartenant à l'intervalle $0 \leq x \leq \pi$.

2. [8 points maximum]

Sachant que $\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1$, exprimez les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$ à l'aide de racines carrées.

Déterminez alors, en fonction de $\sin \frac{\pi}{8}$, la longueur AB d'un côté de l'octogone régulier dont les sommets se trouvent sur le cercle de rayon $OA = 1$ centré en l'origine O.



3. [12 points maximum]

Une suite géométrique complexe $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = (1-i)u_n$.

(a) Calculez le quatrième terme de la suite, votre réponse devra être mise sous la forme $x + iy$ avec x, y réels.

(b) Calculez la somme des 20 premiers termes de la suite (u_n), votre réponse devra être mise sous la forme $a(1 + 2^m)$, où vous déterminerez $a \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

(c) On fixe $k \in \mathbb{N}$ et l'on définit une seconde suite $(v_n)_{n\geq 1}$ par $v_n = u_n u_{n+k}$. Montrez que (v_n) est une suite géométrique.

(d) On définit une troisième suite $(w_n)_{n\geq 1}$ par $w_n = |u_n - u_{n+1}|$.

i) Montrer que (w_n) est une suite géométrique.

ii) En faisant référence à des points dans le plan complexe, quelle est l'interprétation géométrique du résultat précédent ?

4. [5 points maximum]

Donnez l'allure[1] d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie toutes les 4 propriétés suivantes :

1. f est 2 fois dérivable,
2. $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
3. $\frac{df}{dx} = 0$ seulement en $x = 0$,
4. $\frac{d^2f}{dx^2} = 0$ seulement en $x = -2$ et $x = 2$.

[1]donner l'allure = dessinez le graphe grossièrement.

5. [15 points maximum]

On considère deux dés équilibrés à 6 faces. On note n_1 le résultat obtenu par le premier dé, n_2 celui du second. Soit $S = a + b\ n_1 + c\ n_2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Comment doit-on choisir les valeurs de a, b et c pour que S prenne exactement toutes les valeurs entières de 1 à 36 en suivant une loi uniforme ?
Expliquez votre preuve en détail.

6. [15 points maximum]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculez $S_n = 1 \times 2 \times 3 \quad + \quad 2 \times 3 \times 4 \quad + \quad \ldots \quad + \quad n \times (n+1) \times (n+2)$.
(par exemple $S_1 = 6$, $S_2 = 30$, $S_3 = 90$).

Expliquez en détail vos calculs.

7. [15 points maximum]

On considère n droites du plan $\mathbb{R}^2$ telles que deux d'entre elles ne sont jamais parallèles et que trois d'entre elles ne sont jamais concourantes. Elles délimitent r_n régions du plan contigües. On a par exemple $r_0 = 1$ et $r_1 = 2$.
a) Donnez les valeurs de r_2, r_3.
b) Exprimez r_{n+1} en fonction de r_n.
c) Donnez alors la valeur de r_n en fonction de n, (on montrera ce résultat par récurrence).

8. [25 points maximum]

On considère 10 entiers naturels $x_1, ..., x_{10}$ supérieurs ou égaux à 1 et inférieurs ou égaux à 100. Montrez qu'il en existe toujours deux parties A et B disjointes, non vides et de même somme.

Par exemple, avec $(x_1, ..., x_{10}) = (1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 100)$, on peut choisir $A = (4, 10)$ et $B = (1, 2, 11)$, car $4 + 10 = 1 + 2 + 11$.

On notera que les entiers $x_1, ..., x_{10}$ ne sont pas nécessairement distincts.

9. [25 points maximum]

On considère 1000 points distincts quelconques du plan $\mathbb{R}^2$. Démontrez qu'il existe toujours une droite qui sépare le plan en deux régions contenant chacune 500 de ces points.